МГУ имени М.В. Ломоносова

Шестая международная универсиада по эконометрике

Задание № 1 (15 баллов)

Рассматривается модель парной регрессии

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad cov(x_i; \varepsilon_i) \neq 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Пусть z_i - бинарная инструментальная переменная.

Покажите, что оценка, полученная методом инструментальных переменных, в данном случае будет иметь вид $\hat{\beta}_i^{IV} = \frac{\overline{y_1} - \overline{y_0}}{\overline{x_1} - \overline{x_0}}$, где $\overline{y_1}$ – среднее значение переменной y при условии $z = 1$, то есть:

$$\overline{y_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot I_{(z_i=1)}}{\sum_{i=1}^{n} I_{(z_i=1)}}, \text{где } I_{(z_i=1)} = \begin{cases} 1, \text{если } z_i = 1 \\ 0, \text{если } z_i = 0 \end{cases}$$

Обозначения для $\overline{y_0}, \overline{x_1}$ и $\overline{x_0}$ аналогичны.

Задание №2 (25 баллов)

Рассматривается модель: $Y_i = \theta_1 + \theta_2 X_i + u_i$, где x_i – стохастический эндогенный регрессор.

В распоряжении исследователя помимо данных о переменных X и Y есть данные о ещё двух переменных P и Q таких, что $cov(X_i, P_i) \neq 0$, $cov(X_i, Q_i) \neq 0$, $cov(u_i, P_i) = 0$, $cov(u_i, Q_i) = 0$.

(2.1) Докажите, что оценка двухшагового МНК для параметра θ_2, использующая переменные P и Q в качестве инструментов, будет состоятельной. Если вам требуются какие-либо дополнительные предпосылки, то сформулируйте их.

(2.2) Пусть ваша выборка состоит из 1000 наблюдений, причем вы располагаете данными о средних выборочных значениях переменных:

$$\bar{Y} = \bar{X} = \bar{P} = 0, \qquad \bar{Q} = \overline{PQ} = \overline{XQ} = \overline{P^2} = \overline{YQ} = 1, \qquad \overline{Q^2} = 1.5, \qquad \overline{XP} = \overline{YP} = 2$$

Вычислите состоятельную оценку параметра θ_2 из предыдущего пункта.

Задание №3 (20 баллов)

Макс и Нюша хотят оценить три неизвестные константы, каждую из которых они измеряют независимо, однократно и с ошибкой, имеющей стандартное нормальное распределение:

$$x_i = \mu_i + \varepsilon_i, \qquad \text{где } \varepsilon_i \sim N(0,1), i = 1, 2, 3.$$

Для сравнения различных векторных оценок Макс и Нюша хотят использовать общую величину риска:

$$R = E\left[(\widehat{\mu_1} - \mu_1)^2 + (\widehat{\mu_2} - \mu_2)^2 + (\widehat{\mu_3} - \mu_3)^2\right]$$

Макс решил использовать вектор-столбец $\hat{\mu}^{ML}$ оценок максимального правдоподобия. Нюша любит Макса, но также очень любит число ноль, поэтому придумала *«метод нюшиного правдоподобия»* и использует оценку:

$$\hat{\mu}^N = \alpha \cdot 0 + (1-\alpha)\,\hat{\mu}^{ML}, \qquad \text{где } \alpha = (X^T X)^{-1} \text{ и } X = (x_1, x_2, x_3)^T$$

(3.1) Несут ли величины x_2 и x_3 информацию о параметре μ_1?
(3.2) Какие оценки получит Макс?
(3.3) Чему будет равна общая величина риска для оценок Макса?
(3.4) Какую формулу использует Нюша для оценки μ_1?
(3.5) У кого общая величина риска будет меньше: у Макса или у Нюши?

Замечание:
Без доказательства можно пользоваться соотношением: $E(X-\mu)^T(\alpha X) = E(\alpha X)^T(\alpha X)$

Задание №4 (20 баллов)

Рассматривается модель на панельных данных: $y_{it} = \theta x_{it} + \mu_i + u_{it}$, i=1,…,10000, t=1,2.

Здесь u_{it} — независимые одинаково нормально распределенные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией равной σ^2, μ_i — индивидуальные фиксированные эффекты (ненаблюдаемая переменная), x_{it} – детерминированная скалярная переменная.

Исследователь оценивает параметр θ при помощи модели в первых разностях, то есть использует регрессию для переменных $y_{i2} - y_{i1}$ и $x_{i2} - x_{i1}$.

(4.1) Выведите формулу оценки параметра. Вычислите дисперсию оценки (выразите её через x_{it} и σ^2)
(4.2) Предложите формулу для 95-процентной интервальной оценки коэффициента θ. Ответ обоснуйте.

Задание №5 (10 баллов)

Существует ли стационарный ARMA-процесс, который характеризуется следующими свойствами: коэффициент автокорреляции первого порядка равен 1/2, второго порядка равен 1/3, а третьего и всех последующих порядков — нулю? Ответ обоснуйте

Задача №6 (25 баллов)

Дан временной ряд $y_0, y_1, \cdots, y_{50}$, который описывается авторегрессионным уравнением

$y_t = c + \theta y_{t-1} + \varepsilon_t,$ где $y_0 = 0,\ \varepsilon_t -$ гауссовский белый шум $\left(\varepsilon_t \sim i.i.d.N(0;\sigma^2)\right)$

При помощи стандартного МНК были оценены коэффициенты уравнения $\hat{\theta}$ и $\hat{c}$, посчитаны прогнозные значения $\widehat{y_1} = 0.6, \widehat{y_{22}} = 1, \widehat{y_{24}} = 1.4125.$ Коэффициент детерминации в оценённой регрессии составил 0,48.

Значения характеристик разброса ряда $\{y_t\}$ для трёх временных промежутков составляют:

$$\sum_{t=1}^{49}\left(y_t - \frac{1}{49}\sum_{t=1}^{49} y_t\right)^2 = 2.03, \sum_{t=2}^{50}\left(y_t - \frac{1}{49}\sum_{t=2}^{50} y_t\right)^2 = 1.95, \sum_{t=1}^{50}\left(y_t - \frac{1}{50}\sum_{t=1}^{50} y_t\right)^2 = 1.99$$

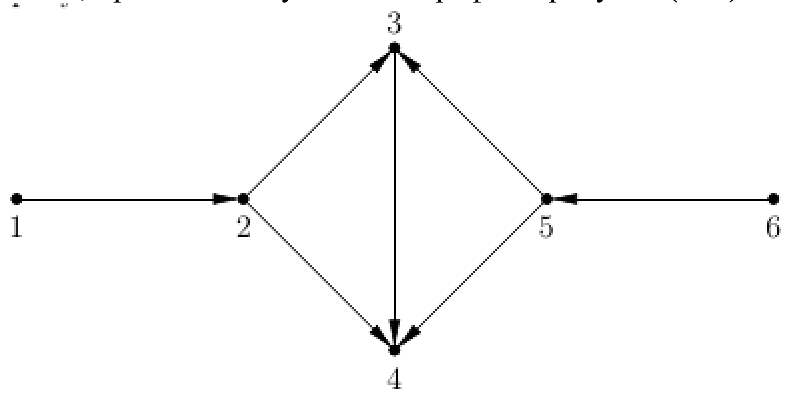
Согласно тесту Дики-Фуллера гипотеза о наличии единичного корня оказалась отклонённой на уровне значимости 1% (критическое значение равно -3.75), но была принята на уровне значимости 5% (критическое значение равно -2.93).

(6.1) Определите оценки параметров $\hat{\theta}$ и $\hat{c}$, вычисленные при помощи обычного метода наименьших квадратов.

(6.2) Можно ли полученные оценки использовать при построении доверительных интервалов для коэффициентов регрессии? Дайте необходимые пояснения.

Задание №7 (35 баллов)

В социальных науках любят изучать влияние людей друг на друга. Например, студенты одной группы, общаясь между собой в вопросах учёбы, могут влиять на успехи друг друга. Формально, это взаимодействие можно представить следующим образом. Рассмотрим группу из n студентов, представленную в виде графа на рисунке (n=6):



Каждая точка (вершина) – студент, а стрелочки (ребра) указывают, *кто на кого влияет* (предположим, что исследователь это точно знает). Структуру такого графа можно охарактеризовать при помощи *матрицы смежности* $W = [w_{ij}]$, такой что:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } j \to i, & i \neq j \\ 0 \text{ в противном случае} \end{cases}$$

Например, для указанного графа матрица смежности будет выглядеть так:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

То есть единица в первом столбце матрицы означает, что на студента 2 влияет студент 1, а тот факт, что первая строка состоит только из нулей, означает, что на студента 1 не влияет никто. Назовем людей, которые влияют на студента номер i, его *друзьями*.

Будем рассматривать упрощённую модель:

$$y = \lambda W y + \beta x + \varepsilon,\ \ \varepsilon \sim N(0; I) \qquad (1)$$

где x и y – векторы размерности $n \times 1$ (x считается случайным и экзогенным), а $W - n \times n$ матрица. Здесь λ и $\beta -$ скаляры, y_i – успеваемость (например, средний балл) i-го студента, $x_i -$ значение объясняющей переменной, которая влияет на успеваемость i-го студента. Тогда i-ая компонента вектора Wy – это суммарная успеваемость друзей студента i. Коэффициент λ можно интерпретировать как *эндогенный эффект*: если суммарно средний балл всех друзей студента вырастет на 1, то средний балл самого студента вырастет на λ. Коэффициент β отражает *экзогенный эффект* и интерпретируется обычным образом.

Модель (1) можно записать в виде:

$$y_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \beta x_i + \varepsilon_i, \ \ \varepsilon \sim N(0;1),$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = E(x_i \varepsilon_i) = E(x_i \varepsilon_j) = 0 \qquad (2)$$

или: $$y_i = \lambda z_i + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

$$\text{где } z_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j \qquad (3)$$

(7.1) Объясните, почему МНК-оценки $\hat{\lambda}$ и $\hat{\beta}$ уравнения (3) не будут, вообще говоря, состоятельными. А если предположить, что $E(z_i\ x_i) = 0$? Указание: считайте, что закон больших чисел (ЗБЧ) выполняется для всех ниже указанных случаев:

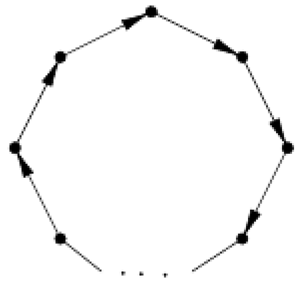
$$plim \frac{1}{n} \sum x_i^2 = E x_i^2, \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i^2 = E z_i^2, \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i x_i = E(z_i x_i)$$

$$plim \frac{1}{n} \sum x_i \varepsilon_i = E(x_i \varepsilon_i), \qquad plim \frac{1}{n} \sum z_i \varepsilon_i = E(z_i \varepsilon_i)$$

где $plim$ означает сходимость по вероятности.

(7.2) Предположим, что $\lambda \in (0, 1)$ известен. Как получить состоятельную оценку β?

В заданиях (3), (4) и (5) предполагаем, что студенты «зациклились», то есть влияют друг на друга, как изображено на следующем графе:



Тогда очевидно, что матрицу W можно представить в виде:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(7.3) Разумно ли предполагать в этом случае, что $E(z_i\ x_i) = 0$? ***Подсказка:*** посчитайте эту величину «в лоб»

(7.4) Чему равны $plim\ \hat{\lambda}$ и $plim\ \hat{\beta}$ (считаем, что как и в задании (1) для указанных последовательностей выполняется ЗБЧ).

(7.5) В какую сторону $plim\ \hat{\lambda}$ и $plim\ \hat{\beta}$ отличаются от λ и β соответственно? Интуитивно, почему так происходит? Считать, что $\lambda \in (0,1)$. ***Замечание:*** если вы не можете посчитать, но можете пояснить содержательно – пишите!