

**IV Студенческая универсиада по эконометрике**  
**МГУ им. М.В. Ломоносова**  
**25 апреля 2015, Москва**

**Задание I тура**

**Задача 1 (15 баллов).** Рассматривается модель  $y_i = \frac{x_i}{\theta_0 + \theta_1 \cdot x_i + u_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $x_i > 0$  – детерминированный регрессор, а  $u_i$  – случайные ошибки модели, такие что  $E(u_i) = 0$ ,  $E(u_i^2) = \sigma^2 \cdot x_i^2$ ,  $E(u_i u_j) = 0$  для всех  $i \neq j$ . Предложите способ получения несмещенных и эффективных оценок параметров  $\theta_0$  и  $\theta_1$  и вычислите эти оценки, используя данные, представленные ниже.

<i>x</i>	<i>y</i>											
1	2/3											
1	1											
1	1											
1	2											
2	4											
2	4											

Ваше решение следует сопроводить подробными пояснениями и необходимыми доказательствами.

**Задача 2 (30 баллов).** Исследователь анализирует модель со стохастическими регрессорами  $y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 w_i + u_i$ .

$y_i$  – среднее количество автомобилей, которое менеджер автосалона продает в течение месяца,

$w_i$  – стаж работы менеджера автосалона (в годах),

$x_i$  – фиктивная переменная равная единице для того менеджера автосалона, который прошел курсы повышения квалификации,

$u_i$  – независимые и одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием.

Исследователь располагает данными о 100 менеджерах, причем так получилось, что курсы повышения квалификации среди них прошел только один из них, Иван Петров, который в среднем продает в течение месяца 18,8 автомобилей и имеет стаж работы, равный двум годам.

Кроме того, исследователю известно, что  $\sum_{i=1}^{100} y_i = 500$ ,  $\sum_{i=1}^{100} w_i = 100$ ,  $\sum_{i=1}^{100} w_i^2 = 200$ ,

$$\sum_{i=1}^{100} w_i y_i = 900.$$

- 1) Найдите МНК-оценки коэффициентов модели. Проверьте значимость переменной  $x$ , если известно, что сумма квадратов остатков в рассматриваемой модели равна 380,24 **(10 баллов)**.
- 2) Исследователь предполагает, что переменная  $w$  является экзогенной, в то время, как переменная  $x$  является эндогенной. Поэтому он использует для оценки параметров модели двухшаговый МНК (2МНК), где в качестве инструмента для эндогенного регрессора используется переменная  $z$ . Известно, что  $\sum_{i=1}^{100} z_i y_i = 500$ ,  $\sum_{i=1}^{100} z_i = 100$ ,  $\sum_{i=1}^{100} z_i w_i = 100$ . Кроме того, известно, что для вышеупомянутого Ивана Петрова значение переменной  $z$  равно 0. Найдите 2МНК-оценки коэффициентов модели (или покажите, что это невозможно). Если вам удалось найти оценки параметров, то проверьте значимость переменной  $x$  **(10 баллов)**.
- 3) Рассмотрим теперь модель  $y_i = \theta_0 + \theta_1 x_i + \theta_2 w_i + \theta_2 x_i w_i + u_i$ . Найдите МНК-оценки коэффициентов модели (или покажите, что это невозможно). Если вам удалось найти оценки параметров, то проверьте значимость переменной  $x$  **(10 баллов)**.

**Задача 3 (20 баллов).** Экономика страны Универсиады описывается следующей системой одновременных уравнений:

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t + G_t \\ C_t &= \theta_1 + \theta_2 Y_t + u_t \end{aligned}$$

$Y_t$  – ВВП,  $C_t$  – потребление,  $I_t$  – инвестиции (экзогенная переменная),  $G_t$  – государственные закупки товаров и услуг (экзогенная переменная),  $u_t$  – случайные шоки потребления: независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Два эконометриста хотят оценить предельную склонность к потреблению в рассматриваемой экономике. Первый предлагает использовать для оценки двухшаговый МНК (2МНК) и единственный инструмент для потребления – инвестиции. Второй согласен, что следует использовать 2МНК, однако предлагает использовать для потребления сразу два инструмента: инвестиции и госзакупки. В распоряжении исследователей имеется случайная выборка  $(Y_t, C_t, I_t, G_t), t = 1, 2, \dots, 100$ .

Какой из эконометристов получит более точную оценку предельной склонности к потреблению? Для ответа на вопрос сравните условные (при условии  $(C_t, I_t, G_t), t = 1, 2, \dots, 100$ ) дисперсии полученных эконометристами оценок параметра  $\theta_2$  **(20 баллов)**.

**Задача 4 (15 баллов).** Рассматривается модель:  $y_t = \theta \cdot y_{t-1} + u_t$ , где случайные ошибки характеризуются моделью авторегрессии первого порядка:  $u_t = \rho \cdot u_{t-1} + \varepsilon_t$ ,  $|\theta| < 1, |\rho| < 1, \varepsilon_t$  – независимые, одинаково распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$  (10 баллов).

1) Будет ли состоятельной МНК-оценка параметра  $\theta$  в уравнении  $y_t = \theta \cdot y_{t-1} + u_t$ .

Обоснуйте свой ответ, вычислив соответствующий предел по вероятности (9 баллов).

2) Если ваш ответ на предыдущий вопрос отрицательный, то предложите способ получить состоятельную оценку параметра  $\theta$  (6 баллов).

**Задача 5 (40 баллов).** Для оценки зависимости урожайности пшеницы ( $y$ ) от количества внесённых удобрений ( $x$ ) проводится эксперимент по выращиванию пшеницы на  $n$  полях одинаковой площади, причем на первом поле используется 1 единица удобрения, а на каждом следующем в два раза меньшее количество, чем на предыдущем поле. По собранным данным исследователь оценивает модель регрессии  $y_i = \theta \cdot x_i + \varepsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , предполагая, что:

(а) выполняются все предпосылки теоремы Гаусса – Маркова;

(б) случайные ошибки - нормальны.

1) Будет ли МНК-оценка коэффициента  $\theta$  состоятельной при указанном способе сбора данных? Обоснуйте свой ответ. (25 баллов)

Далее, усомнившись в гомоскедастичности случайных ошибок, исследователь решил найти эффективную оценку параметра  $\theta$ , в предположении, что эти ошибки гетероскедастичны с дисперсиями  $D\varepsilon_i = \delta \cdot x_i^2$ ,  $\delta > 0$

2) Найдите новую оценку. Будет ли она состоятельной. (15 баллов)

**Задача 6 (20 баллов).** Для модели ARMA(1;2):

$$y_t = 10 - 0,25y_{t-1} + \varepsilon_t - 0,75\varepsilon_{t-1} - 0,25\varepsilon_{t-2}, \quad \varepsilon_t \sim WN$$

a). Вычислите  $E(y_t)$  и  $Var(y_t)$  (3 балла)

b). Найдите, если это возможно, представление временного ряда в виде  $MA(\infty)$  и  $AR(\infty)$ . (9 баллов)

c). Вычислите коэффициенты автокорреляции 1, 2 и 3-го порядков. (4 балла)

d). Вычислите частный коэффициент автокорреляции  $r_{част}(2) = corr(y_t, y_{t+2} | y_{t+1})$  (4 балла)

**Задача 7 (60 баллов).** Рассмотрим следующую модель:

$$E\left(\frac{X - \theta}{(X - \theta)^2 - \theta^2}\right) = 0 \quad (1)$$

где  $X$  – случайная величина с распределением  $P$ ,  $\theta$  – числовой параметр. Заметим, что если модель (1) верно специфицирована (т.е. существует  $\theta$  для которой (1) верно), то выполнено следующее условие:

$$\theta = \arg \min_{\gamma} \left\{ (E[X] - \gamma)^2 + \left( E[(X - \gamma)^2] - \gamma^2 \right)^2 \right\}. \quad (2)$$

Мы можем использовать это свойство для того, чтобы предложить следующий способ оценивания параметра  $\theta$ :

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\gamma} \left\{ (\bar{X} - \gamma)^2 + \left( \overline{X^2} - 2\bar{X}\gamma \right)^2 \right\} \quad (3)$$

где  $\bar{X}$  и  $\overline{X^2}$  – выборочное среднее и выборочный второй момент, соответственно.

- (а) Как вы могли бы обосновать выбор такой оценки? Выпишите в явном виде формулу для оценки (**8 балла**).
- (б) Докажите, что оценка, которую мы выбрали, является состоятельной при условии, что модель (1) верно специфицирована (**8 балла**).
- (в) Продолжая считать, что модель (1) верна, докажите что оценка, которую вы построили, является асимптотически нормальной. Посчитайте асимптотическую дисперсию оценки. Вы можете предполагать любые технические условия, которые вам понадобятся для доказательства (укажите эти условия) (**14 баллов**).
- (г) Предположим, что модель (1) на самом деле неверно специфицирована. Используя формулу, которую вы вывели в (а) посчитайте предел по вероятности этой оценки (**10 баллов**).
- (д) Обозначьте предел, который вы нашли в (г), за  $\theta^*$  и докажите, что оценка, центрированная на величину  $\theta^*$ , является асимптотически нормальной. Посчитайте ее дисперсию. Прокомментируйте разницу между этой дисперсией и той, что вы посчитали в пункте (в) (**12 баллов**).
- (е) Предположим, что вы оценили параметр  $\theta$ , используя приведенную выше оценку, и хотите посчитать ее стандартную ошибку. Опишите, как бы вы это сделали, используя ваши результаты из пунктов (в) и (д). Какой из двух способов вам кажется более предпочтительным и почему? (**8 балла**).