Универсиада по эконометрике-2018. Решения.

Задание 1. Разминочное

Пункт (а) Нужно построить график зависимости логарифма заработной для мужчин:

$$\widehat{\ln w_i} = 10 + 60x_i - 3x_i^2,$$

и для женщин:

$$\widehat{\ln w_i} = 10 + 48x_i - 3x_i^2.$$

Нужно обсудить, что по мере увеличения стажа зарплата, сначала растет, а затем убывает, а также, что кажется, что на рынке труда наблюдается дискриминация по гендерному признаку.

Пункт (б) Модель заработной платы для женщин имеет вид:

$$\ln w_i = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_4)x_i + \beta_3 x_i^2 + \varepsilon_i$$

Это парабола. Её вершина находится в точке

$$-\frac{(\beta_2 + \beta_4)}{2\beta_3}$$

Следовательно, в нашем случае необходимо тестировать гипотезу

$$-\frac{(\beta_2 + \beta_4)}{2\beta_3} = 10$$

$$\beta_2 + \beta_4 = -20\beta_3$$

$$\beta_2 + 20\beta_3 + \beta_4 = 0$$

Расчетное значения тестовой статистики имеет вид

$$t = \frac{\hat\beta_2 + 20\hat\beta_3 + \hat\beta_4}{\sqrt{\widehat{var}(\hat\beta_2 + 20\hat\beta_3 + \hat\beta_4)}} = \frac{60 - 20 * 3 - 12}{\sqrt{9 + 20^2 * 0{,}1 + 0{,}4 + 2 * 20 * (-1) + 0 + 0}} =$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{9 + 40 + 0{,}4 + 2 * 20 * (-1) + 0 + 0}} = \frac{-12}{\sqrt{9{,}4}} = -3{,}91$$

Критическое значение при уровне значимости 5% равно 1,96. Расчетное значение по модулю больше критического, поэтому следует отвергнуть тестируемую гипотезу.

Пункт (в) Сформулируем тестируемую гипотезу в терминах коэффициентов модели:

$$x^*_{\text{М}} = x^*_{\text{Ж}} + 1$$

$$-\frac{\beta_2}{2\beta_3} = -\frac{\beta_2 + \beta_4}{2\beta_3} + 1$$

$$\beta_2 = \beta_2 + \beta_4 - 2\beta_3$$

$$\beta_4 - 2\beta_3 = 0$$

Расчетное значения тестовой статистики имеет вид

$$t = \frac{\hat\beta_4 - 2\hat\beta_3}{\sqrt{\widehat{var}(\hat\beta_4 - 2\hat\beta_3)}} = \frac{-12 + 6}{\sqrt{\widehat{var}(\hat\beta_4 - 2\hat\beta_3)}} = \frac{-6}{\sqrt{0{,}4 + 4 * 0{,}1 - 2 * 0}} = \frac{-6}{\sqrt{0{,}8}} = -6{,}71$$

Критическое значение при уровне значимости 5% равно 1,96. Расчетное значение по модулю больше критического, поэтому следует отвергнуть тестируемую гипотезу.

Задание 2. Панели

Пункт (а) Внутригрупповое преобразование состоит в том, что от исходной регрессии следует перейти к регрессии в отклонениях от средних по времени значений:

$$(y_{it}-\overline{y}_i)=\theta(x_{it}-\overline{x}_i)+(u_{it}-\overline{u}_i)$$

Параметр этой преобразованной модели следует оценить при помощи МНК.

Внутригрупповая оценка имеет вид (необходимо вывести из задачи минимизации суммы квадратов остатков):

$$\hat{\theta}=\frac{\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it}}{\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(\tilde{x}_{it})^2}, \text{ где } \tilde{y}_{it}=y_{it}-\overline{y}_i,\ \tilde{x}_{it}=x_{it}-\overline{x}_i.$$

$$Var(\hat{\theta})=Var\left(\frac{\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it}}{\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(\tilde{x}_{it})^2}\right)\overset{(A)}{=}\frac{1}{\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(\tilde{x}_{it})^2\right)^2}Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it}\right)$$

При поиске дисперсии оценки переход (А) выполнен в силу предпосылки о детерминированности x_{it}.

Преобразуем числитель. Обратим внимание, что переход от дисперсии суммы к сумме дисперсий $\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}Var(\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it})$ был бы неверен, поскольку $\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it}$ не являются независимыми, т.к. $(u_{it}-\overline{u}_i)$ не являются независимыми.

$$Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\tilde{x}_{it}*\tilde{y}_{it}\right)=Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)*(y_{it}-\overline{y}_i)\right)=$$

$$Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)*(\theta x_{it}+\mu_i+u_{it}-\theta\overline{x}_i-\mu_i-\overline{u}_i)\right)=$$

$$Var\left(\theta\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)^2+\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{it}-\overline{x}_i)*(u_{it}-\overline{u}_i)\right]\right)=Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{it}-\overline{x}_i)*(u_{it}-\overline{u}_i)\right]\right)=$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{i1}-\overline{x}_i)*(u_{i1}-\overline{u}_i)+(x_{i2}-\overline{x}_i)*(u_{i2}-\overline{u}_i)+(x_{i3}-\overline{x}_i)*(u_{i3}-\overline{u}_i)\right]\right)=$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{i1}-\overline{x}_i)*u_{i1}+(x_{i2}-\overline{x}_i)*u_{i2}+(x_{i3}-\overline{x}_i)*u_{i3}-\overline{u}_i*(x_{i1}+x_{i2}+x_{i3}-3\overline{x}_i))\right]\right)=$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{i1}-\overline{x}_i)*u_{i1}+(x_{i2}-\overline{x}_i)*u_{i2}+(x_{i3}-\overline{x}_i)*u_{i3})-\overline{u}_i*0\right]\right)=$$

$$Var\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}\left[(x_{it}-\overline{x}_i)*u_{it}\right]\right)=\sigma^2\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right)$$

Ответ: $Var(\hat{\theta})=\dfrac{1}{\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(\tilde{x}_{it})^2\right)^2}\sigma^2\left(\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)^2\right)=\dfrac{\sigma^2}{\sum_{t=1}^{3}\sum_{i=1}^{100}(x_{it}-\overline{x}_i)^2}.$

Пункт (б) Во втором случае слагаемые ($x_{it}-\overline{x}_i$) будут маленькими по абсолютной величине. Следовательно, сумма их квадратов тоже будет мала, и из-за этого дисперсия оценки будет большой. Во первом случае всё будет наоборот. Поэтому в первом случае оценка будет более точной.

Задание 3. Разность разностей

Первый способ решения

1. Первое среднее изменение сходится по вероятности к математическому ожиданию изменения преступности в странах, где введен закон:

$$E(y_{i,2018} - y_{i,2013}|w_i = 1) = E(\beta \cdot y_{i,2013} + \alpha \cdot 1 + u_i - y_{i,2013}|w_i = 1) =$$
$$= (\beta - 1)E(y_{i,2013}|w_i = 1) + \alpha$$

2. Второе среднее изменение сходится по вероятности к математическому ожиданию изменения преступности в странах, где не введен закон:

$$E(y_{i,2018} - y_{i,2013}|w_i = 0) = E(\beta \cdot y_{i,2013} + \alpha \cdot 0 + u_i - y_{i,2013}|w_i = 0) =$$
$$= (\beta - 1)E(y_{i,2013}|w_i = 0)$$

3. Если вычесть из первой разности вторую, то получим предел по вероятности для оценки, которую использует наш исследователь:

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} E(y_{i,2018} - y_{i,2013}|w_i = 1) - E(y_{i,2018} - y_{i,2013}|w_i = 0)$$
$$= (\beta - 1)\left(E(y_{i,2013}|w_i = 1) - E(y_{i,2013}|w_i = 0)\right) + \alpha$$

Здесь важно вспомнить, что в условии написано: «Известно, что в 2013 году закон вводился в регионах, в которых уровень преступности был особенно высок».

В терминах нашей задачи это означает, что $E(y_{i,2013}|w_i = 1) - E(y_{i,2013}|w_i = 0) > 0$.

Для краткости обозначим $E(y_{i,2013}|w_i = 1) - E(y_{i,2013}|w_i = 0) = C$.

Таким образом, получаем, что $\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \alpha + (\beta - 1)C$, *где* $C > 0$.

Отсюда видно, что оценка состоятельна тогда и только тогда, когда $(\beta - 1)C = 0$, то есть, когда $\beta = 1$.

Оценка будет занижена тогда и только тогда, когда $\alpha + (\beta - 1)C < \alpha$. Отсюда: $\beta < 1$.

Например, если на самом деле закон снижает преступность ($\alpha < 0$), то оценка нашего героя, скорее всего, будет ещё «более отрицательной» ($\alpha + (\beta - 1)C < \alpha < 0$), то есть использование такого метода оценивания будет приводить к переоценке эффективности закона по сравнению с истинным состоянием дел.

Ответ: (а) при $\beta = 1$, (б) при $\beta < 1$.

Второй способ решения

Если участник универсиады знаком с методом разность разностей, то он, конечно, узнает его в условии задания. В этом случае он может использовать тот факт, что оценка метода разность разностей эквивалента использованию МНК-оценки в регрессии вида:

$$\Delta y_i = \theta + \alpha \cdot w_i + \varepsilon_i, \text{где } \Delta y_i = y_{i,2018} - y_{i,2013}.$$

Легко видеть, что в нашем случае $\theta = 0$ и $\varepsilon_i = (\beta - 1)y_{i,2013} + u_i$.

Воспользуемся стандартным результатом для парной регрессии:

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \alpha + \frac{cov(w_i, \varepsilon_i)}{var(w_i)}$$

Отсюда ясно, что оценка будет состоятельной при $cov(w_i, \varepsilon_i) = 0$и будет заниженной при $cov(w_i, \varepsilon_i) < 0$

$$cov(w_i, \varepsilon_i) = cov(w_i, (\beta - 1)y_{i,2013} + u_i) = (\beta - 1)cov(w_i, y_{i,2013})$$

В условии написано: «Известно, что в 2013 году закон вводился в регионах, в которых уровень преступности был особенно высок». Поэтому $cov(w_i, y_{i,2013}) > 0$.

Следовательно, $cov(w_i, \varepsilon_i) = 0$ при $\beta = 1$ и $cov(w_i, \varepsilon_i) < 0$ при $\beta < 1$, что приводит нас к такому же ответу, что и в предыдущей версии решения.

Ответ: (а) при $\beta = 1$, (б) при $\beta < 1$.

Задание 4. Гетерогенный эффект воздействия и ошибка спецификации
Пункт (а)

$$\begin{pmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\alpha}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum x_i^2 & \sum x_i w_i\\ \sum x_i w_i & \sum w_i^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\sum x_i y_i\\ \sum w_i y_i\end{pmatrix} \xrightarrow{p} \begin{pmatrix}Ex_i^2 & Ex_i w_i\\ Ex_i w_i & Ew_i^2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}Ex_i y_i\\ Ew_i y_i\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Ex_i^2 Ew_i^2 - (Ex_i w_i)^2}\begin{pmatrix}Ew_i^2 & -Ex_i w_i\\ -Ex_i w_i & Ex_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Ex_i y_i\\ Ew_i y_i\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{Ex_i^2 Ew_i^2 - (Ex_i w_i)^2}\begin{pmatrix}Ew_i^2 Ex_i y_i - Ex_i w_i Ew_i y_i\\ -Ex_i w_i Ex_i y_i + Ex_i^2 Ew_i y_i\end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \frac{Ex_i^2 Ew_i y_i - Ex_i w_i Ex_i y_i}{Ex_i^2 Ew_i^2 - (Ex_i w_i)^2}.$$

Подставим в это выражение $y_i = \beta \cdot x_i + \gamma \cdot x_i \cdot w_i + \varepsilon_i$ и воспользуемся условием экзогенности случайных ошибок.

$$Ew_i y_i = E(\beta w_i x_i + \gamma x_i w_i^2) = \beta E(w_i x_i) + \gamma E(x_i w_i^2)$$

$$Ex_i y_i = E(\beta x_i^2 + \gamma x_i^2 w_i) = \beta E(x_i^2) + \gamma E(x_i^2 w_i)$$

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \frac{(Ex_i^2)\left(\beta E(w_i x_i) + \gamma E(x_i w_i^2)\right) - (Ex_i w_i)\left(\beta E(x_i^2) + \gamma E(x_i^2 w_i)\right)}{Ex_i^2 Ew_i^2 - (Ex_i w_i)^2}$$

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \gamma \frac{E(x_i^2)E(x_i w_i^2) - E(x_i w_i)E(x_i^2 w_i)}{E(x_i^2)E(w_i^2) - (Ex_i w_i)^2}$$

Отметим, что для всех наблюдений $w_i^2 = w_i$.Поэтому выражение можно упростить:

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \gamma \frac{E(x_i^2)E(x_i w_i) - E(x_i w_i)E(x_i^2 w_i)}{E(x_i^2)E(w_i) - (Ex_i w_i)^2} = \gamma E(x_i w_i)\frac{E(x_i^2) - E(x_i^2 w_i)}{E(x_i^2)E(w_i) - (Ex_i w_i)^2}$$

Интересующий исследователя средний эффект воздействия составляет:

$$E\alpha_i = \gamma E x_i$$

Так как $\left(\gamma E(x_i w_i)\frac{E(x_i^2) - E(x_i^2 w_i)}{E(x_i^2)E(w_i) - (Ex_i w_i)^2}\right) \neq \gamma E x_i$, то оценка несостоятельна. Направление асимтотического смещения может быть произвольным.

Пункт (б)

$$\hat{\alpha} \xrightarrow{p} \gamma E(x_i w_i)\frac{E(x_i^2) - E(x_i^2 w_i)}{E(x_i^2)E(w_i) - (Ex_i w_i)^2} = \gamma E(x_i) E w_i \frac{E(x_i^2) - E(x_i^2)E(w_i)}{E(x_i^2)Ew_i - (Ex_i)^2 (Ew_i)^2} =$$

$$= \gamma E(x_i)\frac{E(x_i^2)(1 - E(w_i))}{E(x_i^2) - (Ex_i)^2 E(w_i)} < \gamma E(x_i)$$

Чтобы доказать последнее неравенство, покажем, что числитель дроби меньше знаменателя. Действительно:

$$E(x_i^2)\left(1 - E(w_i)\right) < E(x_i^2) - (Ex_i)^2 E(w_i)$$

$$-E(w_i)E(x_i^2) < -(Ex_i)^2 E(w_i)$$

$$(Ex_i)^2 < E(x_i^2)$$

$$0 < E(x_i^2) - (Ex_i)^2$$

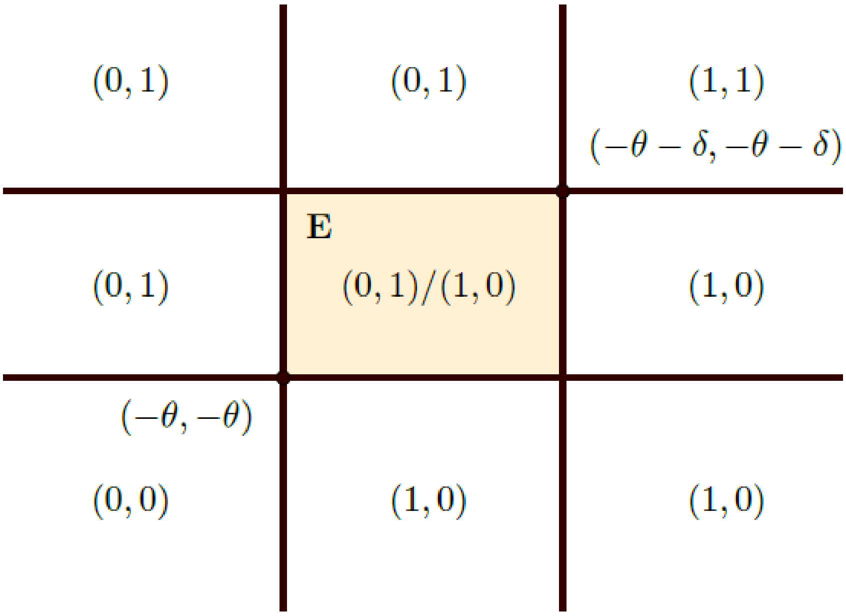
Оценка является несостоятельной и асимптотически заниженной.

Ответ: оценка несостоятельна в обоих случаях. В пункте (а) смещение может быть в любую сторону, в пункте (б) оценка будет занижена.

Задание 5. А мне летать, а мне летать, а мне летать охота!

Пункт (а)

Ответом является следующий график:



Пункт (б) Исходя из графика:

$$P((0,0)) \;=\; P(\varepsilon_1 \le \;-\theta, \varepsilon_2 \le -\theta) \;=\; [F(-\theta)]^2$$
$$P((1,1)) \;=\; [1 \;-\; F(-\theta \;-\; \delta)]^2$$

Пункт (в) Область отмечена оранжевым на графике в пункте (а)

Пункт (г) Необходимые вероятности можно посчитать, например, так

$$P\big((0,1)\big) = P(\varepsilon_1 \le -\theta \;-\; \delta, \varepsilon_2 \ge -\theta) - \lambda[F(-\theta \;-\; \delta) - F(-\theta)]^2 =$$
$$= F(-\theta \;-\; \delta)(1 \;-\; F(-\theta)) \;-\; \lambda[F(-\theta \;-\; \delta) - F(-\theta)]^2$$
$$P((1,0)) \;=\; P(\varepsilon_1 \ge -\theta, \varepsilon_2 \le -\theta \;-\; \delta) \;-\; (1 \;-\; \lambda)[F(-\theta \;-\; \delta) - F(-\theta)]^2$$
$$= F(-\theta \;-\; \delta)(1 \;-\; F(-\theta)) \;-\; (1 \;-\; \lambda)[F(-\theta \;-\; \delta) - F(-\theta)]^2$$

Пункт (д) Функция правдоподобия будет иметь вид

$$\mathcal{L}(\lambda) \;=\; [F(-\theta)^2]^{n_{00}} \cdot \left[\big(1 - F(-\theta - \delta)\big)^2\right]^{n_{11}} \cdot$$
$$\cdot \left[F(-\theta - \delta)\big(1 - F(-\theta)\big) - \lambda\big(F(-\theta - \delta) - \; F(-\theta)\big)^2\right]^{n_{01}} \cdot$$
$$\cdot \left[F(-\theta - \delta)\big(1 \; - F(-\theta)\big) - (1 - \lambda)\big(F(-\theta - \delta) - F(-\theta)\big)^2\right]^{n_{10}}$$

Логарифмируя, получим

$$l(\lambda) \;=\; 2n_{00}log(F(-\theta)) + 2n_{11}log(1 - F(-\theta - \delta)) + n_{01}log(F(-\theta - \delta)(1 - F(-\theta))$$
$$- \lambda\big(F(-\theta - \delta) - F(-\theta)\big)^2) + n_{10}log(F(-\theta - \delta)\big(1 - F(-\theta)\big)$$
$$- (1 - \lambda)\big(F(-\theta - \delta) - F(-\theta)\big)^2)$$

Откуда

$$\hat{\lambda} = \frac{n_{01}}{n_{10} + n_{01}} + \frac{n_{10} - n_{01}}{n_{10} + n_{01}} \cdot \frac{F(-\theta - \delta)\big(1 \;-\; F(-\theta)\big)}{\big(F(-\theta \;-\; \delta) - \; F(-\theta)\big)^2}$$

Пункт (е) Из такого представления очевидно, что $\hat{\lambda} > \hat{\lambda}_{Naive}$ если $n_{10} > n_{01}$ и наоборот.